Juegos Cooperativos y la asignación de costos *

Paula Corcho Sánchez **

Resumen

En este trabajo se realiza un breve repaso de la modelización de situaciones económicas cooperativas a través de Juegos Cooperativos. Se revisan y comentan algunas de las soluciones definidas para este tipo de situaciones desde la Teoría de Juegos. Posteriormente, se realiza una interpretación de lo que en el mundo empresarial se conoce como colaboración empresarial y se relaciona con los aspectos cooperativos de los juegos. Se da una interpretación de la asignación de costes de un proyecto común entre varias empresas desde la Teoría de, Juegos Cooperativos. Las distintas soluciones que nos ofrece la Teoría de Juegos como el núcleo, el valor de Shapley, el nucleolo, son ejemplos de cómo repartir entre un grupo de empresas los costes comunes a los que se enfrentan en proyectos como la construcción de un pantano, distribución de gastos telefónicos, etc.

1.1 Introducción

La Teoría de Juegos aporta importantes y numerosas contribuciones en la modelación y comprensión de un gran número de fenómenos económicos. Todo sistema económico es, en cierto modo, un sistema de interacción entre agentes más o menos independientes. Actualmente, la Teoría de Juegos, forma parte del instrumental utilizado por los economistas a la hora de analizar cualquier sistema como un contexto de interacción entre agentes racionales, independientes y con intereses, al menos parcialmente, contrapuestos.

La Teoría de Juegos puede ser definida como la teoría que estudia modelos matemáticos que representan un aspecto de conflicto o de cooperación entre agentes racionales e inteligentes (Myerson R.,1991). De esta forma, diremos que un juego es un problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre el otro. El diseño de estrategias competitivas, su ejecución, las negociaciones e incluso las relaciones interpersonales están llenas de factores estratégicos que pueden analizarse en el esquema conceptual de la Teoría de Juegos.

Los juegos se han clasificado tradicionalmente en juegos cooperativos y juegos no cooperativos. La diferencia estriba en las posibilidades de comunicación y negociación que se les permite a los jugadores. Los juegos no cooperativos son aquellos en los que cada agente actúa siguiendo exclusivamente su propio o interés sin poder firmar contratos vinculantes. Los juegos cooperativos se caracterizan por la existencia de un cierto poder superior capaz de hacer cumplir los acuerdos posibles

Ambos tipos de juegos se formalizan de distinta manera. Los juegos no cooperativos, se presentan en forma estratégica o en forma extensiva. La forma extensiva (Kuhn, 1953) de un juego describe con gran detalle la secuencia de movimientos de los jugadores, la información que tienen los jugadores en cada momento del juego y otros detalles, como situaciones de azar. En cambio, los juegos cooperativos se presentan en forma característica o coalicional, que consiste en la descripción de los pagos que reciben cada una de las coaliciones posibles.

Estos juegos de carácter cooperativo surgen

* Este trabajo ha sido presentado en el curso de organización Industrial de la Universidad Carlos III de Madrid y, en el Seminario del Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativo. Universidad de Guadalajara (México).

** Doctora en Economía y labora en la Universidad de Extremadura. Facultad de CC. EE. y Empresariales.. Dpto. de Economía Aplicada y Organización de Empresas. Campus Universitario. BADAJOZ. E-mail: pcorcho@umex.es

para poder responder a dos preguntas cruciales: ¿cuál es la mínima ganancia que puede conseguir por sí mismo? y ¿cuál es el mínimo que pueden conseguir actuando todos los jugadores a la vez? Para modelar las respuestas de estas preguntas se utilizará la representación llamada forma coalicional o función característica. Nuevamente el objetivo es buscar soluciones a este tipo de juegos. Las soluciones de un juego cooperativo buscan fórmulas de reparto de la cantidad conseguida por todos los jugadores actuando de forma cooperativa. Evidentemente, estas formas de reparto asignarán una cantidad a cada jugador después de realizar la cooperación, que tiene que ser comparada con la cantidad obtenida por el jugador por sí mismo antes de cooperar. Si la cantidad asignada con el reparto * solución, es menor que lo obtenido individualmente, este jugador no llegará * un acuerdo para participar en el juego cooperativo.

Una de las características o propiedades que debería tener[1] un juego cooperativo es que la cooperación incremente positivamente los resultados; para ello en Teoría de Juegos, existen una serie de propiedades que intentan reflejar esta idea. Así por ejemplo, el concepto de *monotonía* de un juego nos expresa la idea de que la adhesión de nuevos miembros a una coalición de agentes nunca empeora el resultado obtenido por la coalición. Otra idea que refuerza aún más la anterior, es la denominada *superaditividad*, que indica que romper una coalición ya formada resultaría ineficiente. Estas serán las primeras propiedades que deben cumplir los modelos de juegos cooperativos para, garantizar la formación de la coalición total. Otras propiedades, también relacionadas con la forma de incrementar los resultados, no son tan generales y no todos los modelos cooperativos las verifican; , una de las más importantes es la convexidad. La convexidad implica una regularidad de la aportación de los nuevos jugadores al juego, es decir, que la adhesión de un nuevo jugador a una coalición resulte más beneficiosa cuando la coalición sea mayor. Esta propiedad es bastante restrictiva y no todos los juegos cooperativos la cumplen. Por ello, han surgido diversos conceptos que relajan la idea de la convexidad; podemos encontrar en la literatura conceptos como semiconvexidad, convexidad en media, ese. Los juegos cooperativos, según verifiquen una propiedad u otra se clasificarán en juegos convexos, juegos semiconvexos, ... Estos conceptos analizan la incorporación de un jugador a una determinada coalición grande o pequeña; por ejemplo la convenxidad dice que la incorporación de jugadores es más beneficiosa cuando el grupo formado es más numeroso, pero no analiza cuál ha sido la aportación realizada por el jugador al juego. Por ello, surgen modelos cooperativos donde la aportación o peso que tiene cada agente viene determinada formalmente por un número real; los recursos aportados por los jugadores al juego se formalizan mediante un vector donde cada componente representa la aportación de cada jugador. Al final del juego[2] obtendrán una cantidad que posteriormente repartirán entre los participantes. Esta cantidad dependerá de los recursos aportados por los jugadores.

La idea de un juego cooperativo es reflejar el número de agentes que se unen y la cantidad total y parcial obtenida. En un juego cooperativo quedan representada estas cantidades mediante una función denominada función característica.

La representación de un juego cooperativo se realiza mediante la forma característica o forma coalicional. Los elementos principales son las coaliciones de jugadores[3] que se pueden llegar a formar.

1 Esta propiedad no es específica de los juegos cooperativos; hay juegos que no la verifican. Lo que ocurre es que es una propiedad que nos garantiza la formación de la coalición total.

2 Una vez que los jugadores comprueben que les interesa cooperar y deciden actuar al unísono.

3 Nótese que a cada jugador se le hace corresponder con un número natural, o sea N= (1,2,...). En los juegos cooperativos ese número es una forma de reconocer al jugador, sin hacer referencia a ningún tipo de orden.

En definitiva, si hay N jugadores se podrán formar una cantidad de 2^N coaliciones, es decir, subconjuntos de N, $S \subseteq N$. Cada coalición posible obtendrá un resultado en el juego, $v(S) \in \Re_+$, que es el valor que toma la función característica en cada conjunto S, es decir $v : 2^N \rightarrow \Re_+$ siendo $2^N = \{S : S \subseteq N\}$ La representación del juego cooperativo queda determinada por el par (N, v). Existen otros juegos cooperativos donde no todas las coaliciones son posibles. Las coaliciones que no se pudiesen formar se determinan antes de que comience el juego. En la parte dedicada a juegos cooperativos no imponemos ningún tipo de restricción sobre las coaliciones y permitimos que se forme cualquier subconjunto de N.

Lo que hace determinante un juego cooperativo es la forma específica que tenga la función v. Si la función v es una función convexa, una forma polinómica, o una parábola, tendremos juegos cooperativos muy distintos, en cuanto a propiedades se refiere. En la bibliografía existen dos tipos de investigaciones; la primera es la de realizar estudios sobre funciones v muy generales, y otra es la de realizar estudios sobre funciones v muy específicas. Claro está que los resultados del segundo tipo de investigación sólo se aplicarán para unos determinados juegos cooperativos (los representados por esa v). Así podemos citar ejemplos como los estudios realizados por O'Neill (1982) para los llamados juegos de bancarrota, los realizados por Izquierdo (1996) para los juegos financieros, etc. Todos ellos son juegos cooperativos con una función v bastante determinada (no todo juego cooperativo es un juego financiero, por ejemplo). La otra vertiente es realizar estudios muy generales para juegos cooperativos.

Una vez que se analiza el tipo de juego objeto del estudio se pasa al análisis de las soluciones de dicho juego. En la Teoría de Juegos cooperativa existe una definición analítica de lo que se entiende por solución de un juego. Podríamos decir que solución es una forma de repartir la cantidad total obtenida entre los participantes del juego. Entre la bibliografía dedicada a los estudios generales de los juegos cooperativos podemos encontrar diferentes soluciones (ya estudiadas para cualquier juego cooperativo). Entre estos trabajos cabe destacar los realizados por Gillies (1959), Schmeidler (1969), Shapley (1953)... Estos autores dan unas formas de reparto muy particulares (núcleo, nucleolo, valor de Shapley) con diferentes propiedades e interpretaciones. Todas son formas de reparto interesantes y dependerá el caso que estemos tratando para elegir una u otra.

Lo que se pretende en este capítulo es relacionar el problema de asignaciones de costes con la Teoría de Juegos cooperativos. El problema se empieza a. plantear cuando mi grupo de organismos o empresas deciden una inversión conjunta y quieren garantizar la cooperación inicial una vez decidida la inversión. La colaboración entre empresas es una estrategia que se lleva a cabo cuando un grupo de personas, entes u organismos se dan cuenta que les resultaría económicamente más rentable trabajar de forma conjunta que individualmente. Este tipo de colaboración o asociacionismo podrá llevarse a cabo en cualquiera de las áreas funcionales en el que tradicionalmente se divide una empresa, siendo su objetivo alcanzar o aproximarse al nivel óptimo del que se derivan minimizar costes y maximizar beneficios.

Las cuestiones que nos pueden surgir acerca de este tipo de cooperativismo son las siguientes: ¿cuál debe ser el número óptimo de las empresas dispuestas a cooperar?, ¿cómo pueden medirse los incentivos a colaborar?, ¿cómo deben repartirse las cargas y beneficios de la colaboración para garantizar equidad distributiva y la cohesión entre sus miembros?, etc. Este trabajo se centra en la relación entre la idea de cooperación entre empresas y la teoría cooperativa de los juegos.

La Teoría Cooperativa de los Juegos se remonta a los orígenes de la Teoría de Juegos (Newman ` y Morgeenstern, 1947). Su objetivo es el estudio de las situaciones de conflicto estratégico donde existe la posibilidad de formación de coaliciones. En esta teoría no se supone que los jugadores estén a priori comprometidos a colaborar entre ellos. La única hipótesis es que todo grupo de jugadores tiene Instrumentos para alcanzar compromisos de acción entre sus miembros y que la negociación interna de cualquier coalición se realiza bajo condiciones de gran transparencia informativa.

1.2 Cooperación de empresas y Juegos cooperativos.

En este apartado nos vamos a detener un poco en el análisis de lo que a lo largo del trabajo vamos a, entender o interpretar con el concepto de *cooperación de empresas o colaboración* que realizan algunas empresas. Por otro lado, vamos a realizar un tratamiento formal de la Teoría de los Juegos cooperativos. Desde el primer momento, vamos a interpretar que las empresas que han decidido colaborar están compartiendo un determinado bien o servicio para el aprovechamiento conjunto de las utilidades de dicho bien o servicio, y que éstas son los jugadores de un juego cooperativo.

1.2.1 Interpretación de un cooperativismo empresarial.

La colaboración o cooperación de empresas a la que nos referimos podemos definirla como una relación contractual entre empresas para llevar a cabo conjuntamente una determinada función empresarial. Por ejemplo, como resultado de un contrato de colaboración, las empresas pueden adquirir derechos y deberes en la utilización de un bien o servicio comunitario.

Las empresas, a, veces, deciden establecer una organización que se responsabilice de la gestión y el control de las operaciones de exportación; con ello están creando una fórmula reguladora del consumo comunitario del servicio. Estas ideas pueden englobarse en la idea de bienes semipúblicos. Se distinguen por el consumo comunitario y por la posibilidad de excluir de su consumo a aquellas personas o empresas no encuadradas dentro de la organización o de la colaboración. Estas actuaciones de cooperativismo o de colaboración dan lugar a situaciones donde cada miembro individual mantiene su identidad y en el que las relaciones y dependencias mutuas se limitan al aprovisionamiento y al consumo de bienes y servicios compartidos. Este tipo de consumo tiene unas características económicas propias. Una de estas características es la que comentamos a continuación: el consumo de un individuo o de empresa adicional no reduce la cantidad disponible. Son bienes y servicios en los cuales la utilidad derivada del consumo conjunto es superior o igual a la suma del consumo por separado. En los bienes de consumo privado lo anterior no ocurre, sino que es todo lo contrario. En los bienes públicos el sentido de la desigualdad no importa, sino que lo que hay que controlar es el consumo individual para evitar situaciones injustas como la conocida por *free-rider.*

Otro de los puntos Importantes a considerar, en la cooperación empresarial, es *los incentivos.* Este tipo de actuación sólo se producirá cuando la colaboración o la cooperación entre empresas suponga unos beneficios totales no inferiores a los que se produciría con una actuación individual.

Los estudios de Newman y Morgenstern ofrecen desde la Teoría de Juegos unas posibilidades analíticas amplias en el tratamiento de los problemas económicos que hemos comentado en los párrafos anteriores. En este trabajo vamos aplicar la Teoría de Juegos cooperativos al caso de la cooperación empresarial. Para ello, vamos analizar un estudio de la función característica de los juegos cooperativos, su interpretación económica, y estudiaremos distintas soluciones de un juego cooperativo, para el caso de la cooperación empresarial.

Como se ha presentado en la introducción, la Teoría de Juegos puede ser definida como la teoría que estudia modelos matemáticos que, de alguna forma, representen un aspecto de conflicto o de cooperación entre agentes racionales e inteligentes (Myerson R.,1991). De esta forma, diremos que un juego es un problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tienen efectos sobre el otro. El diseño de estrategias competitivas, su ejecución, las negociaciones e incluso las relaciones interpersonales están llenas de factores estratégicos que pueden analizarse en el esquema conceptual de la Teoría de Juegos.

Los juegos se han clasificado tradicionalmente en juegos cooperativos y juegos no cooperativos. La diferencia estriba en las posibilidades de comunicación y negociación que se les permite a los jugadores. Los juegos cooperativos se caracterizan por la existencia de un cierto poder superior capaz de hacer cumplir los acuerdos posibles. Estos juegos se definen como un modelo donde interesan las coaliciones que se forman y el pago que recibe cada una de ellas. Las coaliciones de jugadores son los posibles subconjuntos de N = {1, 2, 3, ... , n}, denotadas por $S \subseteq N$ (donde N es el conjunto de jugadores). El pago de cada coalición viene dado por la función *v(S)*, llamada función característica del juego. La función característica es un elemento primitivo de estos Juegos; sin embargo, en aplicaciones reales se ha de construir a partir de otros elementos. Por ejemplo, los conceptos de α núcleo y β núcleo se refieren a soluciones de juegos cooperativos que se distinguen por construirse de distinta manera a partir de un juego no cooperativo (Moulin, 1986). Entre otros trabajos más recientes podemos citar los elaborados por Izquierdo y Rafels (1996), Iñarra y Usategui (1993), Grafe et al. (1998), etc. En estos trabajos se estudian los Juegos Financieros., los juegos Cobb-Douglas y los juegos de Externalidades respectivamente, que se definen a partir de una función característica, con una interpretación económica específica. En lo que sigue tendremos que definir la función característica a través de la función de costes que tengamos en cada situación.

Una vez definido el juego, lo interesante es la forma de reparto del beneficio de la cooperación. Una solución de un juego cooperativo consiste en distribuir la ganancia total del juego entre sus jugadores. Existen dos clases de soluciones: soluciones de conjunto y soluciones puntuales. Las soluciones de conjunto están formadas por un conjunto de asignaciones o repartos que verifican ciertas condiciones, mientras que una solución puntual selecciona una única asignación. Entre las soluciones de conjunto más importantes estudiamos el Núcleo (Shapley, 1967) y los conjuntos de negociación de Aumann-Maschler (1964) y Mas-Colell (1989).

Como podemos observar en la representación analítica (N, v) de un juego cooperativo la función característica es de vital importancia. El resultado que consigue cada coalición viene determinado por la expresión v(S). Algunas propiedades sobre la función característica nos reflejan los incentivos que poseen los jugadores a participar en el juego.

Las propiedades de monotonía y superaditividad son estándar en la literatura de juegos cooperativos y permiten asegurarse de que los beneficios no disminuyen por actuar en coalición.

Definición 1. 1 Un juego (N, v) es monótono si.

$v(S) < v(T)$, para toda coalición S y T tal que $S \subseteq T$.

La idea de la siguiente propiedad es que la adhesión de nuevos miembros a una coalición de agentes nunca empeora el resultado obtenido por la coalición.

Definición 1.2. Un juego (N, v) es superaditivo si se verifica que:

$$v(S)+v(T) \leq v(S \cup T) \; \forall S, T \subseteq A, \; S \cap T = \phi.$$

Con estas propiedades sabemos que si las empresas son jugadores de un juego cooperativo superaditivo y monótono es porque existen incentivos a colaborar y actuar conjuntamente y por lo tanto, el juego se llevará a cabo y se ejecutará. Cada coalición posible obtendrá $v(S)$ y en particular, si se forma la coalición total se obtendrá $v(N)$. Directamente relacionado con la función característica (medida del resultado de las diferentes coaliciones) están los resultados que obtienen los jugadores al participar en el juego (solución del juego).

Una solución deseable es que el reparto efectuado nos lleve a una situación de equilibrio: Un jugador, *i*, racional debe admitir que el reparto que se le otorgue sea como mínimo lo que obtendría si participase sólo en el juego, es decir, que lo que le corresponda sea al menos *v({i})*. Esto es lo que se conoce como condición de racionalidad individual.

Otra de las condiciones deseables es la condición de optimización de Pareto, que es que se reparta todo lo conseguido que en este caso será el pago recibido en el juego por el máximo número de participantes en el juego, es decir, *v(N)*.

Como nombramos en párrafos anteriores, hay varias formas de repartir la cantidad total *v(N)* y esto se expresa con las distintas soluciones de los juegos cooperativos que comentamos anteriormente. Una de las soluciones nombradas es el Núcleo y que a continuación vamos analizar:

Definición 1.3. Sea v un juego cooperativo superaditivo en forma característica. El núcleo, C(v), está, constituido por las asignaciones x $\left(x_i\right)_{i\in N}$ tales que se verifican las siguientes desigualdades:

$$\sum_{i\in N} x_i = v(N) y \sum_{i\in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq N$$

Como puede deducirse de la definición las condiciones que cumplen las asignaciones que forman parte del núcleo son una generalización directa de las condiciones de optimización y de racionalidad individual. La existencia del núcleo significa que ningún subconjunto de los miembros de una coalición puede mejorar su resultado abandonado la coalición o formando una coalición más pequeña.

Existen otras definiciones de soluciones para juegos cooperativos como puede ser el conjunto de negociación de Aumman-Maschler: la principal característica de los conjuntos de negociación se haya en las objeciones y contraobjeciones que realizan los jugadores en el proceso de negociación. Pasemos a analizar estos conceptos y la notación que se va a utilizar.

El conjunto de las coaliciones que contengan a un jugador *i* y no contengan *j* será denotado por Γ_{ij}, es decir, $\Gamma_{ij} = \{\in N : i \in S, j \notin S\}$

Definición 1.4. Una objeción del Jugador *i* contra el jugador *j* con respecto a la asignación *x es un par* (T, y) con $T \in \Gamma_{ij}$ $y \in \Re^t$, que verifica:

(i) $y_k > x_k, \forall k \in M \cap T$, y

(ii) $y(T) = v(T)$

Definición 1.5. Dada una objeción *(T, y)* de *i* contra *j* con respecto a *x*, diremos que *(M, z)* es una contraobjeción de *j* contra *i* si $M \in \Gamma_{ij}, y \in \Re^t$, y se verifica que:

(i) $z_k \geq y_k \forall k \in M \cap T$,

(ii) $z_k \geq y_k \forall k \in M \setminus T$,

(iii) $z(M) = v(M)$.

Aumann y Maschler (1964) definen el conjunto de negociación de la siguiente manera:

Definición 1.6. Una imputación *x Î I(v)* es un elemento del conjunto de negociación $M_1^{(i)}(v)$ si para cada objeción de un jugador *i* contra otro jugador *j*, con respecto a *x* una contraobjeción de *j* contra *i*.

Es inmediato comprobar que todo elemento del núcleo pertenece al conjunto de negociación de Aummann-Maschler. Mediante la definición de núcleo obsérvese que no es posible que un jugador realice una contraobjeción respecto a un elemento del núcleo. El recíproco no siempre es cierto.

Otra de las soluciones importantes o utilizadas en los juegos cooperativos son: el valor de Shapley y el nucleolo.

La idea subyacente a la valoración de Shapley es la de solución arbitral. Se trataría de asociar con cada juego una imputación que si fuera propuesta a los distintos jugadores al principio del juego les parecería una solución razonable. La valoración de

Shapley pasaría a ser, por tanto, el valor esperado del juego para cada jugador. Este concepto de solución fue propuesto por Shapley (1953). Su tratamiento fue axiomático, es decir, consistió en formular cuatro axiomas que razonablemente una solución arbitral debería satisfacer y demostró que los cuatro axiomas definen una solución única.

Veamos cuáles son esos axiomas que caracterizan al valor de Shapley:

Denotemos por $\phi(v) = \{\phi_i(v) : i \in N\}$ la solución propuesta por Shapley.

I. Axioma de eficiencia: $\phi(v)$ es siempre una imputación. Es decir, $\sum_{i \in N} = v(N)$ el problema que se está, resolviendo es el de distribuir *v(N)* entre los *N* jugadores.

II. Axioma de simetría: Lo que recibe cada jugador depende sólo de su posición en el juego. Es decir, si intercambiamos las posiciones de dos jugadores también se intercambiarán las utilidades que reciben en la solución. Analíticamente,

$\forall (N, v) \in \Gamma_N$ y toda permutación

$\theta : N \Rightarrow N, con(N, \theta v) \in \Gamma_N$

se cumple que $\phi_{\theta(i)}(\theta v) = \phi_i(v) \forall_i \in N$

III. Axioma del jugador nulo: Un jugador i es nulo en un juego si no contribuye nada a ninguna coalición, $v \cup \{i\} = v(S), \forall S \subset N$. Este axioma nos pide que si un jugador nada contribuye, nada recibe. Es decir $\phi_i(v) = 0$

IV. Axioma de aditividad: Para todo par de juegos *(N, v)* y *(N, w)* se cumple que

$\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w), donde, v + w(S) = v(S) + w(S)$

Se ha demostrado que existe, a lo sumo, una solución que satisfaga los axiomas del I al IV, es decir, que en todo juego cooperativo existe sólo una solución que verifica los axiomas anteriores.

La fórmula usual para el valor de Shapley $\phi(v)$ es la siguiente:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N_i} \gamma_n(S)[v(S \cup i) v(S)] = \sum_{S \subseteq N_i} \gamma_n(S)\left[\sum_{j \in S}(\beta_j + \beta_i)^r r(s+1) - \left(\sum_{j \in S}(\beta_j)^r r(s)\right)\right]$$

donde $\gamma_n(T) = \dfrac{t!(n-t-1)!}{n!}, \forall T \subseteq N$

Otro tipo de solución puntual que nos ofrece la literatura es el Nucleolo. La definición, de este concepto de solución de un juego, es matemáticamente un poco Complicada, pero intuitivamente refleja claramente una solución que reparte los beneficios de la cooperación de manera que se minimice el perjuicio máximo entre todas las coaliciones de agentes; en realidad, la idea que subyace en el Nucleolo es la siguiente: un vector de pagos estará en el Nucleolo si, en un sentido que definiremos más adelante, los excesos de todas las coaliciones para ese vector de pagos se hacen los más pequeños posibles. Esta solución puntual fue introducida en la Teoría de Juegos por Schemeidler (1969) y se define sobre la base de los denominados excesos de las coaliciones.

Definición 1.7 Sea *(N, v)* un juego cooperativo y *x* una imputación. El exceso de la coalición *S Ì N* respecto a *x*, se define como *e(S, x) = v(s)-x(S)*.
Un exceso positivo representa que la coalición S no ha recibido como mínimo lo que ella se podía garantizar y por lo tanto, la distribución estará fuera del Núcleo.

Definición 1.8 Diremos que el exceso ϕ *(x)* es preferido lexicográficamente a ϕ (y) si, siendo

$\phi(x) = \phi(X)_1\ \phi(X)_2, \ldots\ \phi(X)_{2^N})$

se cumple que ϕ (x)i < ϕ (y)i para algún *i* tal que

$1 < i < 2^N$ y ϕ (X)k < ϕ (Y)k para algún *k* tal que

$1 \leq i \leq 2^N$

Definición 1.9 El Nucleolo es aquella imputación que posea los excedentes asociados lexicográficamente más pequeños.

En general, no existe una fórmula sencilla que permita el cálculo del Nucleolo.

Una vez definidos formalmente los elementos y soluciones de un juego cooperativo pasamos a ilustrar con ejemplos la metodología de los juegos cooperativos.

1.2.2 Empresas agrícolas cooperan en el regadío.

La idea de colaboración es la siguiente: Tres empresas, A, B y C, deciden o se plantean la posibilidad de cooperar para la puesta en marcha del regadío en tres fincas de distintas características. La instalación que se necesita para llevar a cabo el riego de cualquiera de las parcelas o fincas es una estación de bombeo y un sistema de distribución del agua que se remonte de un río próximo a las fincas

Las posibles estructuras de coaliciones que se puedan formar son las siguientes:

$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{A,B,C\}$

Es decir, que las distintas estructuras dependen del grado de cooperación entre las fincas. Las posibilidades son:

1) La autosuficiencia de cada área. Esto supondría la puesta en marcha de tres sistemas separados de regadío con sus respectivos costes.
2) La colaboración de dos fincas y la autosuficiencia de una. Esto supone que tendremos un coste de autosuficiencia y un coste de colaboración de dos fincas que instalan el sistema de bombeo y de distribución en común.
3) La colaboración de las tres fincas supone un sistema de bombeo y de distribución común.

Consideremos los siguientes costes hipotéticos debidos a la cercanía con el río. La más alejada es A, luego B y por último C. Los costes son 42, 40 y 30 respectivamente. Supongamos que si se unen A y B los costes para ambas en conjunto serán 70. Para A y C son 68 y para B y C son 66. Si se deciden a cooperar las tres tendremos un coste de 95.

Con esta situación tendremos que los costes totales son:

La autosuficiencia de cada área:

$42 + 40 + 30 = 112$.

La colaboración de dos fincas y la autosuficiencia de una de ellas:

$100(70+30)$, $108(68+40)$ y $108(66+42)$.

La colaboración de las tres fincas: 95.

Definimos la función característica del juego de cooperación en el regadío como el ahorro en costes que supone la colaboración sobre la autosuficiencia de cada empresa o finca:

$v(\{A\}) = 0$, $v(\{B\}) = 0$, $v(\{C\}) = 0$,

$v(\{A,B\}) = 12$, $v(\{A,C\})$ 4, $v(\{B,C\}) = 4$,

$v(\{A,B,C\})$ 17.

El ahorro que supone la cooperación de las tres fincas, se reparte según las soluciones definidas en la Teoría de Juegos Cooperativos

Para repartir, la cantidad conseguida por cualquier coalición, hay que tener en cuenta ciertas exigencias económicas. Uno de los requisitos importantes es la *Optimización de Pareto*, lo que supone que se reparta de tal forma que la suma del ahorro asignado iguale el ahorro total:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$$

La condición de racionalidad individual exige que cada área soporte un coste máximo igual que el que soportaba en condiciones de autosuficiencia:

$$v(\{i\}) \geq 0, i = \{1,\ldots,n\}$$

Por otro lado, podemos añadir la racionalidad de grupo, es decir, el pago de cualquier área en las coaliciones de dos áreas ha de ser no menor que el que puede conseguir sin la cooperación de la tercera.

Si observamos las condiciones que cumplen las asignaciones que pertenecen al núcleo del juego *(N, v)*, donde la función característica es el ahorro en costes que supone la colaboración sobre la autosuficiencia de cada empresa agrícola[4] son los

4 Añadimos a la definición que $v(\phi) \cdot 0$

vectores $x = (x_1, ..., x_n)$ que verifican las ecuaciones anteriores. Son aquellos pagos que además de cubrir los costes totales garantizan que cada subconjunto de fincas no paga una porción de costes superior a los que incurriría si el suministro lo organizara por su propia cuenta. El hecho de pertenecer al núcleo del juego es una exigencia mínima para que una distribución de los resultados sea mutuamente aceptable. Cualquier imputación o asignación que no está en el núcleo podría ser bloqueada por una coalición de las otras dos áreas.

Una primera aproximación nos lleva a concluir que la imputación resultante de repartir a todos igual las ganancias de la colaboración no está en el núcleo y por lo tanto, esta, solución será bloqueada.

1.2.3 Juegos Generalizados de Externalidades.

Los Juegos Generalizados de Externalidades también poseen su interpretación económica. La función característica para un juego con N jugadores queda definida para cada coalición S con la siguiente expresión:

$$v(S) = \left(\sum_{i \in S} \beta_i \right)^{\alpha} r(s)$$

donde $(\beta) = (\beta_i)_{i \in N}$ es un vector de R^n, el parámetro a valor es un real mayor o igual a 1, r es una función no decreciente r: N ---> R_+ , y s es el cardinal de la coalición S.

El pago que recibe la coalición S depende de la suma de las coordenadas de b y del cardinal de la coalición. En estos juegos cada jugador, $i \in N$, contribuye con una dotación, β_i y también con su presencia al valor total que recibe la coalición a la que pertenece. La interpretación económica que poseen los Juegos Generalizados de Externalidades podría resumirse del siguiente modo: Los jugadores aportan los recursos que poseen Y a cambio reciben una contraprestación por la cesión de estos recursos, teniendo en cuenta el número de participantes en la coalición. La función r asegura que, la llegada de nuevos jugadores beneficia a los jugadores que originalmente estaban en el juego.

Existen situaciones económicas que se asemejan a la interpretación anterior. Las inversiones conjuntas que se realizan en algunas ocasiones dependen de la cantidad invertida y del número de inversores. Las ayudas económicas que reciben algunas asociaciones están en función del número de socios y de la cuota que aporta cada socio. Las empresas, con idéntico capital (λ), que deciden cooperar entre sí y producir conjuntamente con la tecnología de Cobb Douglas aportan recursos, η_i y capital, λ. El número de empresas participantes, por ejemplo s, también se refleja en la función total de producción, $f(\lambda, \eta) = \lambda^{\alpha} s^{\alpha} \left(\sum_{i \in s^{\eta_i}} \right)^{\beta}$. Si consideramos la producción como el pago de cada coalición tenemos que, analíticamente la función $f(\lambda, \eta)$ define un Juego Generalizado de Externalidades (Véanse también como juegos Cobb-Douglas en Iñarra y Usategui, 1993). Los llamados Bienes Relacionados (Uhlaner, 1989) son un subconjunto de los Bienes Públicos Locales, con la peculiar característica de que son definidos en actividades donde los individuos aumentan su utilidad si la cantidad de individuos en esa actividad crece. El análisis de estos bienes sugiere circunstancias en las cuales la participación es beneficiosa. Ambos conceptos, Bienes Relacionados y Juegos Generalizados de Externalidades, fomentan la participación de los individuos. Finalmente, en el modelo de Moulin (1992) donde los agentes comparten el coste de alguna decisión pública, llegamos a una expresión del tipo

$$v(S) = \frac{\left(\sum_{i \in S^{\beta_i}} \right)^2}{2k}$$ donde S es un grupo de agentes que deciden compartir los costes de la provisión de un bien, βi es la tasa de marginal de sustitución entre los bienes privados y el público y k es una constante de la función de costes. Analíticamente podemos englobar este juego en los Juegos Generalizados de Externalidades.

Estos juegos están analizados en su totalidad en Corcho (1998). Podemos apuntar algunas de las características más relevantes: monotonía, superaditividad, convexidad en media, ... Destacar que además de sus analogías con las situaciones económicas anteriormente mencionadas, posee soluciones eficientes y racionales, es decir, posee elementos en el conjunto Núcleo. Otra de las características es que el conjunto de Negociación de Aumann-MasclileT coincide con el Núcleo, y el valor de Shapley, bajo ciertas condiciones, también está en el núcleo del juego. Son juegos donde las distintas soluciones definidas para juegos cooperativos se van reduciendo a un grupo más pequeño.

1.3 Ejemplos económicos y su interpretación como un juego.

Muchas decisiones de las inversiones públicas se toman de forma descentralizada y en cooperación con diversos órganos públicos y privados que se reparten el coste de la inversión realizada.

Una de las situaciones que nos podemos encontrar es la decisión de construir un pantano y que hay varios grupos interesados en ello: El ayuntamiento esperan obtener agua potable con destino a sus municipios, los campesinos de la región desean regar sus tierras con el agua del pantano, una compañía eléctrica que quiere utilizar el agua del embalse para mover las turbinas de una central hidráulica, el gobierno central quiere controlar las inundaciones de la zona, con esta presa construida. Como podemos observar el pantano debe ser capaz de retener cantidades diferentes de agua, según los objetivos perseguidos y, por tanto, de estos objetivos dependerán los costes de construcción y de mantenimiento. La, cuestión es la de buscar cuál seria la contribución de cada uno de los entes citados en la financiación del coste de la inversión.

Otra situación de este tipo, podemos encontrarla en el reparto de los costes de una central telefónica entre sus usuarios. El problema que se plantea es el de aplicar una tarifa que sea lo más justa posible y que además en que la suma de los pagos por llamadas cubra el coste del servicio. Este problema puede ser tratado bajo el punto de vista de la Teoría de Juegos, concretamente las soluciones de Aumann y Shapley, (1974) para juegos no atómicos.

Otro ejemplo referente al reparto de costes, es cuando el aeropuerto (a través del gobierno central), por ejemplo, quiere fijar unos precios por el uso de las pistas de aterrizaje por parte de las compañías aéreas, que permitan cubrir el coste de la instalación y mantenimiento de dichas pistas. Para hallar el reparto de los costes cumpliendo unas condiciones establecidas, se puede recurrir a una solución de la Teoría de Juegos llamada nucleolo (Schmeidler, 1969).

En los próximos apartados vamos a desarrollar cada uno de estos ejemplos, pero antes vamos a establecer la terminología que vamos a emplear. Todos los casos anteriores tienen un denominador común: se pretende repartir un recurso entre varios. El conjunto de usuarios potenciales de un proyecto lo denotaremos por N = {1,2,...... n}, el coste del proyecto será c(S) para un subconjunto $S \subseteq N$. Es el coste mínimo de servir al conjunto S de usuarios. Un método de asignación de costes es una función Γ (.) definida para todos los N y todas las funciones de coste c(.) sobre N, tal que

$$\Gamma(c)=(x_1,x_2,....x_n)\in \Re^N$$

y que $\sum_{i\in N} x_i$ = c(N), donde xi $\geq$ 0, es la parte del coste que le corresponde financiar al usuario *i*.

Para que el reparto de costes sea voluntario, debemos imponer condiciones que permitan garantizar que nadie pierda cooperando. Estas condiciones se transcriben de la siguiente forma:

$$x_i \leq c(i), \forall_i \in N$$

$$\sum_{i\in S} x_i \leq c(S), \forall S \subseteq N.$$

La eficiencia en el contexto que tratamos se entenderá con relación a los grupos de usuarios de los servicios cuyo coste se reparte y el concepto de marginal se referirá al efecto que ocasiones un aumento o disminución en el número de participantes en el proyecto conjunto.

Lo primero que tenemos que hacer es una modificación de funciones de costes a funciones características, para situarnos en un problema típico de Teoría de Juegos. Los juegos cooperativos tiene como objetivo principal repartir la ganancia total entre sus representantes o jugadores. Dada una función de costes c( ) la ganancia potencial de una coalición S no es más que el ahorro que puede lograrse cooperando, es decir,

$$c(S) = \sum_{i\in S} c(i) - c(S), \forall S \subseteq N$$

En términos de la Teoría de Juegos ya tenemos un juego cooperativo (N, v), en el que N es el conjunto de jugadores o usuarios (finito) y v es la función característica $v :\rightarrow \Re$, que satisface $v(\phi) = 0$, ya que $c(\phi) = 0$. La elección de una asignación de costes $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ es equivalente a escoger una asignación $(y_1, \ldots y_n)$, donde $y_i = c(i) - x_i$.

1.3.1 Reparto de los costes de un pantano.

En los siguientes artículos encontramos este tipo de problemas que vamos a denominar reparto de costes de la construcción de un embalse o pantano: *The Tennessee* Valley *Authority A case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning. Nashville* y en el artículo *Game Theory and the Tennessee Valley Authority. International Journal* of *Game Theory. Los* costes de construcción deberán revertir sobre los beneficiarios directos de las inversiones y, por tratarse de costes muy elevados y la competitividad de las empresas implicadas, el esfuerzo dedicado a obtener fórmulas de reparto fue considerable. El sistema finalmente adoptado fue el método llamado SCRB (separable Cost Remaining Benefit). En realidad, es repartir los costes comunes en proporción a los beneficios de sumarse al proyecto:

$$x_i = c(N) - C(N - \{i\}) + \left(\frac{r^i}{\sum_{i\in N} r^i}\right)\left(c(N) - \sum_{j\in N} c(N) - C(N - \{j\})\right)$$

con $r^i = c(i) - c(N) - C(N - \{i\})$.

En palabras, cada participante paga sus costes marginales y el resto se reparte en proporción a los beneficios obtenidos por unirse al proyecto[5].

Una simple manipulación o cambio de terminología nos lleva a la formulación de la solución en términos de la Teoría de Juegos cooperativos. Según la notación empleada, buscamos las asignaciones y = $(y_1 \ldots y_n)$, *cuyas componentes* serán:

$$y_i = \frac{v_i(N)}{\sum_{i\in N} v_j(N)} v(N), \forall_i \in N$$

siendo $v_i(N) = v(N) - v(N - \{i\})$.

Este tipo de solución se conoce en algunos juegos cooperativos como distribución proporcional. En varios trabajos[6] esta solución ha, sido caracterizada axiomáticamente y comparada con otras soluciones. Entre las características más importantes que cabe señalar es que es una asignación que pertenece al núcleo del juego, y que por tanto no será bloqueada por ninguna otra.

1.3.2 Distribución del coste telefónico.

El servicio de teléfonos es un servicio con elevados costes de instalación, que impiden que un solo cliente pueda pagar su propio servicio telefónico. Un problema de este tipo ha sido estudiado en *Billera, Heath y Raanan (1978)*, donde se discute la distribución de los costes de un nuevo servicio telefónico en la Universidad de Cornell (EEUU). Desde una centralita iban a pasar todas las llama-

---

Se supone que $r \geq 0$ porque si no puede existir algún i que carezca de motivación para incorporarse al proyecto.

Análisis de los juegos con utilidades cambiantes y de los Juegos Generalizados de Externalidades. Tesis doctoral (1999). "Monotonic Solutions of cooperative games". International Journal of Games Teory.

das efectuadas desde cualquier teléfono de la Universidad. La compañía facturaría cada mes en función de las llamadas hechas desde la centralita y la universidad debería, cobrar a los usuarios una cantidad por el importe de las llamadas y además otra cantidad por los costes fijos de instalación, mantenimiento, etc. Visto este problema desde una perspectiva de la Teoría de juegos, se trataría de un juego cooperativo no atómico y el problema sería dividir los beneficios de la cooperación entre los jugadores. En este contexto de los jugadores es conveniente[7] definir a los jugadores como las unidades temporales de las llamadas telefónicas, por ejemplo, los minutos de las llamadas. Entonces los elementos del juego serán: $N = \{1, \ldots n\}$ el conjunto de todas las clases de llamadas y S una coalición de llamadas. Una solución de este tipo de juegos nos la proporciona el valor de los juegos no atómicos de Aumann y Shapley (1974):

$$x(S) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j(S) \int_0^1 \frac{\partial c(t\mu(I))}{\partial q_j} dt,$$

donde $\mu_j(S)$ es el número de llamadas (mensuales) del tipo j en la coalición S (la suma representa el total de minutos de llamadas de la coalición S),

$c(q_1, \ldots q_n)$ es el coste de efectuar todas las llamadas $q_1 .. q_n$ en un mes, y por lo tanto,

$\int_0^1 \frac{\partial c(t\mu(I))}{\partial q_j} dt,$ es la tarifa por minuto de las llamadas de tipo j.

Para ver estos juegos no atómicos aplicados a la distribución de los costes del gasto telefónico véase el artículo Internar Telephone Billing *Rates: Ap*plication of *Non- Atomic G*ame Theory, donde se pueden apreciar los cálculos detallados.

1.3.3 Uso de las pistas de los aeropuertos.

Otro de los problemas de distribución de costes, que hemos mencionado anteriormente, es el de fijar el precio por el uso de la pista de un aeropuerto que cubra el coste de construcción y el uso de la pista.

Supongamos que el aeropuerto es utilizado por aviones distintos. Sea $1 < j < m$ los tipos de aviones. Sea $N = Uj\ Nj$, siendo Nj el conjunto de todos los aviones del tipo j. Sea una función de costes de la siguiente forma:

$$c(s) = max\{c_j : S \cap N_j \neq \phi\}$$

donde c_i el coste de una pista para ser utilizada por los del tipo i. Los aviones suelen clasificarse por el peso y se establece que $C_1 < C_2 < \ldots < C_m$

Esta función de costes expresa que el coste de construir una pista para ser utilizada por el subconjunto de aviones S, es igual al coste del mayor de los aviones de la coalición.

Por otro lado, debemos añadir que la contribución total de las compañías aéreas iguale el coste de la pista y que ningún conjunto de usuarios contribuya más de lo que costaría la pista solamente para ese subconjunto.

Este contexto nos permite, hacer uso de las soluciones de la teoría de Juegos. Una solución interesante en estos casos es el Nucleolo (Schmeidler, 1969). Esta solución, en Teoría de Juegos, es un vector de resultados o distribuciones que hace que la coalición peor parada en términos de la función característica esté lo mejor posible, que la siguiente peor parada también esté lo mejor posible y así sucesivamente. Esta idea depende de la definición de mejor o peor parado. En este trabajo (siguiendo la literatura referente al nucleolo) la establecemos del siguiente modo:

Definición 1.10. Una coalición S estará mejor parada (en cuanto costes) que una coalición T respecto a una asignación x si:

$$c(S) - \sum_{i \in S} x_i > c(T) - \sum_{i \in T} x_i$$

Si denotamos *con ah (x, S)* al ahorro de S relativo a x, es decir

$$ah(x, S) = c(S) - \sum_{i \in T} x_i, \forall S \subseteq N,$$

7 Por utilizar los métodos de análisis continuo.

tratamos de resolver el problema de maximizar el ahorro sobre todos los subconjuntos S y que cumpla que:

$$x_i \leq c(i), \forall_i \in N$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c(S), \forall S \subseteq N.$$

Si este problema tiene solución única, ésta es la solución llamada nucleolo. Obsérvese que el nucleolo es una solución que pertenece al núcleo del juego, y que por lo tanto tampoco va a ser vetada por ninguna coalición.

1.4 Comentarios y conclusiones.

A lo largo de este capítulo, se ha pretendido acercar al lector a la relación existente entre los problemas de reparto de costes comunes y el planteamiento de una clase determinada de juegos cooperativos. La conclusión observada en los diferentes ejemplos expuestos, es que la literatura sobre estos juegos nos ofrece unas soluciones que pueden aplicarse al reparto de costes. Las fórmulas de reparto están dirigidas a garantizar la cooperación, una vez decidida la inversión.

Podemos observar que hay diferentes soluciones en estos contextos de Teoría de Juegos. Por ello, una solución puede considerarse más apropiada que otra para un determinado tipo de problema. La solución Núcleo es una de las más interesantes en el área de los juegos cooperativos, aunque es difícil de computar. El nucleolo es el único que garantiza que, cuando existe, es una solución perteneciente al núcleo. El valor de Shapley es otra **solución** pero que puede no estar en el núcleo. Sólo puede garantizarse su pertenencia al núcleo cuando la función característica es cóncava o cuando el juego es convexo en media[8] o para algunos tipos de juegos, como por ejemplo los juegos de externalidades[9]. Otra característica importante buscada en las soluciones de los juegos cooperativos es la monotonicidad. Esta propiedad relaciona las variaciones de los pagos con los cambios en la función de costes. Exige que si aumenta el coste incrementado por aceptar un determinado individuo en cualquier coalición, su pago no disminuya.

La solución de Shapley es un método bastante utilizado en el reparto de costes, por sus excelentes propiedades. ha sido propuesto, entre otros, para asignar las tasas de aterrizajes de aviones (Litlechid y Thompson, 1977), el coste de los bienes públicos (Loehman y Winston, 1974), etc. Pese a la dificultad o complejidad de este tipo de solución está relacionada con el área económico y las contribuciones marginales.

Las soluciones propuestas por la rama de la Teoría de Juegos a cada uno de los ejemplos desarrollados, poseen características y propiedades diferentes y elegir alguna de ellas dependerá del contexto económico en el que nos encontremos. Comentar, por ejemplo, que el valor de Shapley y el nucleolo, bajo ciertas definiciones, son consistentes[10]

8 Estos juegos son definidos por Iñarra y Ustegui, 1992.

9 Analizados en el working paper Geralized Externality Games, 1996.

10 La consistencia exige que el pago que le corresponde a cada individuo no varíe cuando el sistema se aplica sobre funciones reducidas de costes.

Bibliografía

Aumann R.J. and Maschler M. (1964) The bargaining sets for cooperative games. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 443-476.

Aumann R.J. and Shapley (1974). Values of Non-Atomic Games. Princeton University Press~ Princeton,

Bressy (1992). Agrupación de empresas. Ed Piramide.

Billera L. Heath D. and Raanan J. (1978). Internal Telephone Billing rates; Application of Non-Atomic game Theory. Operation Research, 26.

Corcho P. (1998). Análisis de juegos con utilidades cambiantes y de 10,8 juegos generalizados de externalidades. Tesis Docotoral. Universidad Carlos 111 de Madrid.

Gibbons R. (1993). A primer in game Theory. Ed. Antoni Bosch.

Iñarra E., Usategui J'M.,(1993). The Shapley value and average convex games. International Journal of Game Theory, 22:13-29.

Kuhn W. (19,53). Extensive games and the Problem of Information. Annals of Mathematical study, 28.

Littelechild S. and Thompson G. (1977). Aircarf Landing Fees. A Game Theory Approach. Be]] Journal of Economics, no. 8.

Loehman E and Whinston A. (1974). An Axiomatic Approach. to cost allocation for Public Investment. Public Finance Quaterly, 2.

Scheidler D., (1969). The nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal of Applied Mathematics, 17:1163-1170.

Shapley L.S.(1953). A value for n-person games. Annals of mathematical studies, 28:307-317.

Shapley L.S.(1971). Cores and Convex games. International Journal of Game Theory.

Von Neuman J. Morgenstern 0. (1944). Theory Games and Economic Behavior. Princenton Press.

Young H. P. (1985). Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory.