Interpretación económica de la teoría del control óptimo

Robert Dorfman[1]

La teoría del capital es la economía del tiempo. Su tarea consiste en explicar si, y por qué, un instrumento de producción duradero puede esperarse que contribuya más al valor de la producción durante su vida útil de lo que cuesta producirlo o adquirirlo. A partir de la explicación se deducen conclusiones tanto normativas como descriptivas acerca de la trayectoria temporal de la acumulación de capital por parte de las unidades económicas y de las economías enteras.

Tradicionalmente, la teoría del capital, como todas las otras ramas de la economía, se estudiaba en el contexto del equilibrio estacionario. Por ejemplo, el estado estacionario de los economistas clásicos, y el equilibrio de la teoría de Böhm-Bawerk del periodo de producción, ambas describen al estado de la situación en la cual una mayor acumulación de capital no vale la pena. Una forma de análisis que está confinada a una posición distante y última es pobremente adecuada para el entendimiento de la acumulación y el crecimiento,[2] pero ninguna otra teoría apareció disponible en la mayor parte de la historia de la teoría del capital.

Durante los 50 años pasados se ha percibido, de modo más o menos vago, que la teoría del capital formalmente corresponde a un problema del cálculo de variaciones.[3] Pero se considera al cálculo de variaciones como una materia de estudio más bien misteriosa por parte de la mayoría de los economistas y, además, en sus formulaciones convencionales aparece demasiado rígido para aplicarse a muchos problemas económicos. La aplicación de esta herramienta conceptual a la teoría del capital se mantuvo periférica y esporádica hasta muy recientemente, y la teoría del capital permaneció acotada por las limitaciones tan restrictivas del equilibrio final.

---

1. Dorfman, Robert (1969) "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *The American Economic Review,* vol. LIX, núm. 5, diciembre, pp. 817-831. Traducción de José Héctor Cortés Fregoso, economista y pedagogo, profesor e investigador titular de tiempo completo del Departamento de Métodos Cuantitativos, División de Economía y Sociedad, Centro Universitario de Ciencias Económico Administrativas de la Universidad de Guadalajara, agosto de 2003. La presente traducción ha sido realizada con la anuencia de la *American Economic Review*, según correo electrónico recibido el 29 de septiembre de 2006 enviado por Edda Leithner, cuya dirección electrónica es <edda.r.leithner@vanderbilt.edu>.
2. Un aspecto que Joan Robinson en [9] puntualiza de manera muy enérgica, al igual que otros autores.
3. Ejemplos notables son Hotelling [6] y Ramsey [8].

Todo esto ha cambiado abruptamente en el último decenio como resultado de un reavivamiento, o mejor de una reorientación, del cálculo de variaciones impulsado en gran medida por los requerimientos de la tecnología espacial.[4] En su versión moderna, el cálculo de variaciones se conoce como teoría del control óptimo. Se ha convertido, merecidamente, en el instrumento central de la teoría del capital, a la que le ha infundido un nuevo soplo de vida. Como consecuencia de ello, la teoría del capital ha sido transformada tan profundamente que ha sido rebautizada como teoría del crecimiento, y se ha avenido con numerosas cuestiones importantes prácticas y teóricas que previamente ni siquiera pudieron formularse.

La principal tesis de este documento es que la teoría del control óptimo formalmente es idéntica a la teoría del capital, y que sus principales ideas se pueden lograr mediante el razonamiento económico estricto. Dicha tesis se sostendrá al derivar el teorema principal de la teoría del control óptimo, llamado el principio del máximo, mediante el análisis económico.

Las ecuaciones básicas

Con el propósito de disponer de un vocabulario concreto, considérese el problema decisorio de una empresa que desea maximizar sus ganancias totales durante cierto periodo de tiempo. En cualquier fecha t, esta empresa heredará un cierto nivel de capital y otras condiciones de su comportamiento anterior. Denótenseles por $k(\mathrm{t})$. Con dichas existencias de capital y otras instalaciones k y en tal fecha, en particular t, la empresa se halla en una posición para tomar ciertas decisiones que podrían referirse a la tasa de producción, el precio del producto, el diseño del producto, o cualquiera otra cosa. Denótense por $x(\mathrm{t})$ a las decisiones tomadas en cualquier fecha. Con base en el nivel de capital heredado en la fecha especificada, junto con las decisiones especificadas actuales, la empresa deriva una cierta tasa de beneficios o ganancias netas por unidad de tiempo. Indíquense éstas por $u(k(\mathrm{t}), x(\mathrm{t}), \mathrm{t})$.[5] Esta función u determina la tasa a la cual las ganancias se están obteniendo en el tiempo t como resultado de tener k y tomar las decisiones x.

Considérese ahora la situación que se presenta en la fecha inicial t = 0. Las ganancias totales que se obtendrán desde entonces hasta cierta fecha terminal T están dadas por:

$$W(k_0, \vec{x}) = \int_0^T u(k,x,t)dt$$

lo que es simplemente la suma de la tasa a la cual se está obteniendo una ganancia en cualquier instante descontada a la fecha inicial (si se desea) y sumada para todos

4. Las fuentes gemelas del nuevo cálculo de variaciones son R. Bellman [4] y L. S. Pontryagin, et al. [7]. Bellman enfatizó desde el principio las implicaciones de su obra para la economía.
5. En el desarrollo del trabajo con frecuencia se omitirán los argumento del tiempo en aras de la simplicidad, y entonces se escribirá simplemente $u(k, x, \mathrm{t})$.

los instantes.[6] En esta notación $\vec{x}$ no denota un número ordinario sino la trayectoria temporal completa de la variable de decisión x desde la fecha inicial hasta T. Esta notación asegura que si la empresa empieza con una cantidad de capital inicial k_0 y luego sigue la política de decisión indicada por $\vec{x}$, se obtendrá un resultado total W, el cual es la integral de los resultados obtenidos en cada instante; estos resultados a su vez dependen de la fecha del instante pertinente, luego del nivel de capital y de la decisión aplicable a ese momento. La empresa está en libertad, dentro de límites, para elegir la trayectoria temporal de la variable de decisión $\vec{x}$ pero no puede elegir independientemente la cantidad de capital en cada instante; esto es una consecuencia del capital en la fecha inicial y la trayectoria temporal elegida para la variable de decisión. Esta restricción se expresa al decir que la tasa de cambio de las existencias de capital en cualquier momento es función de su situación presente, la fecha y las decisiones adoptadas. Simbólicamente:[7]

$$\dot{k} = \frac{dk}{dt} = f(k, x, t). \tag{1}$$

Así, las decisiones tomadas en cualquier instante tienen dos efectos. Influyen la tasa a la que las ganancias se obtienen en ese momento y también influyen la tasa a la cual las existencias de capital están cambiando, y por lo tanto el nivel de capital que estará disponible en instantes de tiempo subsiguientes.

Estas dos ecuaciones expresan la esencia del problema de tomar decisiones en un contexto dinámico. El problema consiste en seleccionar la trayectoria temporal simbolizada por $\vec{x}$ de manera que se haga el valor total del resultado, W, tan grande como sea posible al tomar en cuenta el efecto de la elección de x tanto en la tasa instantánea de ganancias como de las existencias de capital que tienen que trasladarse al futuro. Esto es en realidad un problema difícil, y no solamente para principiantes. La dificultad esencial estriba en que se tiene que seleccionar una trayectoria temporal completa de alguna variable. El cálculo elemental enseña cómo elegir el mejor número posible para asignarlo a una variable única o los mejores números para unas pocas variables mediante la diferenciación de alguna función y la igualación de las derivadas parciales a cero. Pero el encontrar la mejor trayectoria temporal posible es un asunto totalmente diferente y conduce a ciertas matemáticas avanzadas. La estrategia de la solución apunta a reducir el problema, el cual, como se presenta, nos requiere encontrar una trayectoria temporal completa para un problema que nos demanda determinar solamente un único número (unos pocos números), lo que es algo que se sabe cómo hacerlo con base en el cálculo ordinario. Dicha transformación del problema se puede realizar de diversas formas. Una de ellas, que data del siglo XVIII, conduce al cálculo de variaciones clásico. Otra, que se adoptará aquí, lleva al principio

6. El argumento t permite la introducción de cualquier ecuación de descuento que pueda ser apropiada.
7. El punto se utilizará frecuentemente para indicar una tasa de cambio respecto al tiempo.

del máximo de la teoría del control óptimo. Este método depende en grado sumo de la introducción de la notación apropiada. Primero, se introduce una ecuación para el valor que se puede obtener por parte de la empresa, dando comienzo en una fecha arbitraria t con cierta cantidad de capital *k* y siguiendo luego una política de decisión arbitraria $\vec{x}$ hasta la fecha terminal. Es

$$W(k_t, \vec{x}, \mathrm{t}) = \int_t^T u[k, x, \tau] d\tau$$

la que, por supuesto, no es otra cosa que la generalización de la ecuación de la *W* introducida previamente.

Divídase ahora a *W* en dos partes. Considérese un intervalo corto de tiempo de duración Δ que comienza en el tiempo t. Se considera a Δ como un periodo tan corto que la empresa no cambiaría a *x* en el transcurso del mismo no obstante que pudiera hacerlo. Entonces se puede escribir

$$(2) \qquad W(k, \vec{x}, t) = u(k, x_t, t)\Delta + \int_{t+\Delta}^T u[k(t), x, \tau] d\tau$$

Esta ecuación establece que si la cantidad de capital disponible en el tiempo t es *k* y si la política indicada por $\vec{x}$ se continúa de entonces en adelante, luego el valor que se contribuye a la suma total a partir de la fecha t está compuesta de dos partes. La primera parte es la contribución de un corto intervalo que inicia en la fecha t. Es la tasa a la cual las ganancias se obtienen durante el intervalo, multiplicadas por la duración del intervalo. Depende del nivel actual de capital, de la fecha y del valor corriente de la variable de decisión, que aquí se indica por x_t. La segunda parte es una integral precisamente de la misma forma que antes, pero que inicia en la fecha t + Δ. Se debe observar que las existencias iniciales de capital para esta última integral no es *k*(t) sino *k*(t + Δ). Este hecho, que las existencias de capital cambiarán durante el intervalo de una manera influida por x_t, desempeñará un papel muy significativo. Se puede aprovechar el hecho de que se ha regresado a la misma forma de la integral al escribir

$$W(k_t, \vec{x}, t) = u(k, x_t, t)\Delta + W(k_{t+\Delta}, \vec{x}, t + \Delta)$$

en donde los cambios en los subíndices se hacen notar con mucho cuidado.

Ahora algo más de notaciones. Si la empresa conociera la mejor selección de $\vec{x}$ de la fecha t en adelante, podría darle seguimiento y por lo tanto obtener un valor seguro. Se indica este valor, el cual resulta de la elección óptima de $\vec{x}$ mediante *V**, como sigue

$$V^*(k_t, \mathrm{t}) = \text{máx}\, W(k_t, \vec{x}, \mathrm{t}).$$

Obsérvese que *V** no incluye a $\vec{x}$ como un argumento. Esto se debe a que $\vec{x}$ ha sido maximizada. El valor máximo que se puede obtener al inicio de la fecha t con capital

k no depende de $\vec{x}$ sino que es el valor que se puede obtener en las condiciones de la mejor elección posible de $\vec{x}$. Supóngase ahora que a la política designada por x_t se le da seguimiento en el corto intervalo de tiempo de t a t + Δ y que posteriormente se sigue la mejor política posible. Por la ecuación (2) la consecuencia de esta política peculiar se puede escribir como

$$V(k_t, x_t, t) = u(k_t, x_t, t)\Delta + V^*(k_{t+\Delta}, t+\Delta)$$

Con palabras, los resultados de seguir tal política son los beneficios que se generan durante el periodo inicial al utilizar la decisión x_t más las ganancias máximas posibles que se pueden concretar al empezar la fecha t + Δ con el capital k(t + Δ) que resulta de la decisión tomada en el periodo inicial.

Se ha llegado ahora al problema ordinario de cálculo de encontrar el mejor valor posible para x_t. Si la empresa adopta este valor, entonces la V de la última ecuación será igual a V^*. El cálculo nos enseña que con frecuencia una manera efectiva de descubrir un valor de una variable que maximiza una función dada consiste en diferenciar la función respecto a la variable e igualar la derivada parcial a cero. Éste es el método que se utilizará. Pero primero se debe prevenir que tal método no es a prueba de fuego. Es completamente posible que las derivadas parciales desaparezcan cuando la función no está maximizada (por ejemplo, pueden desaparecer cuando se minimiza), y no son raros los casos en los cuales las derivadas parciales difieran de cero en el máximo. Posteriormente se retomarán estas implicaciones. Por el momento se supone que la derivada parcial se desvanece en el máximo, se diferencia $V(k_t, x_t, \mathrm{t})$ respecto a x_t, y se obtiene

$$(3) \qquad \Delta \frac{\partial}{\partial x_t} u(k, x_t, t) + \frac{\partial}{\partial x_t} V^*(k(t+\Delta), t+\Delta) = 0.$$

El problema con esta ecuación, aparte del hecho de que la función V^* todavía es desconocida, es que se pide derivar V^* respecto a x_t, en tanto que no se implica a x_t de forma explícita. Para resolver tal problema, obsérvese que

$$\frac{\partial V^*}{\partial x_t} = \frac{\partial V^*}{\partial k(t+\Delta)} \frac{\partial k(t+\Delta)}{\partial x_t}.$$

Ambas expresiones merecen cierto análisis y se empezará con la segunda. Puesto que se está tratando con periodos de tiempo cortos, se puede usar la aproximación

$$k(t+\Delta) = k(t) + \dot{k}\Delta.$$

Es decir, la cantidad de capital en t + Δ es igual a la cantidad de capital en t más la tasa de cambio del capital durante el intervalo multiplicada por la duración del intervalo. Al recordar la ecuación (1), $\dot{k}$ depende de x_t:

$$\dot{k} = f(k, x_t, \mathrm{t}).$$

Entonces, se puede escribir

$$\frac{\partial k(t+\Delta)}{\partial x_t} = \Delta \frac{\partial f}{\partial x_t}.$$

Retómese, ahora, el primer factor, $\partial V^* / \partial k$. Esta derivada es la tasa a la cual el flujo de ganancias máximo posible del tiempo t + Δ en delante cambia respecto a la cantidad de capital disponible en t + Δ. Por lo tanto, es el valor marginal del capital en el tiempo t + Δ, o la cantidad por la que un incremento unitario en el capital que ocurra en ese tiempo incrementaría el valor máximo posible de *W.* Se denota al valor marginal del capital en el tiempo t por λ(t), definido por

$$\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial k} V^*(k,t).$$

Al insertar estos resultados en la ecuación (3), se obtiene

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial x_t} + \lambda(t+\Delta)\Delta \frac{\partial f}{\partial x_t} = 0 \tag{4}$$

y además, la constante Δ se puede cancelar. Se tiene que hacer una simplificación más antes de obtener la primera conclusión importante. El valor marginal del capital cambia gradualmente en el tiempo y, de esta manera, para una aproximación suficientemente buena,

$$\lambda(t+\Delta) = \lambda(t) + \dot{\lambda}(t)\Delta.$$

En otras palabras, el valor marginal del capital en t + Δ es el valor marginal en t más la tasa a la cual está cambiando durante el intervalo multiplicado por la duración del intervalo. Al insertar esta expresión en la ecuación (4), y una vez que se cancela el factor común Δ como está escrito, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_t} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x_t} + \dot{\lambda}(t)\Delta \frac{\partial f}{\partial x_t} = 0.$$

Hágase ahora que Δ se aproxime a cero. El tercer término se hace insignificante en comparación con los otros dos. Al no tomarlo en cuenta, resulta

(5) $$\frac{\partial u}{\partial x_t} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_t} = 0.$$

Éste es el primer resultado importante y constituye cerca de la mitad del principio del máximo. Para el economista tiene sentido completo. Afirma que a lo largo de la trayectoria óptima de la variable de decisión en cualquier momento el efecto marginal de corto plazo de un cambio en la decisión sólo tiene que contrarrestar el efecto de tal decisión en el valor total del nivel de capital un instante después. Se observa eso debido a que el segundo término de la ecuación es el efecto marginal de la decisión actual sobre la tasa de crecimiento del capital con el capital valuado en su valor marginal, λ. La empresa debe elegir *x* a cada momento de forma que la ganancia inmediata marginal precisamente iguale el costo marginal de largo plazo, el cual se mide por el valor del capital multiplicado por el efecto de la decisión en la acumulación de capital.

Supóngase ahora que x_t está determinada de manera que se satisface la ecuación (5). Con el supuesto de que este procedimiento descubre el valor óptimo de x_t, entonces $V(k_t, x_t, \text{t})$ será igual a su valor máximo posible o $V^*(k, \text{t})$. Así,

$$V^*(k,t) = u(k, x_t, t)\Delta + V^*(k(t+\Delta), t+\Delta).$$

Derívese ahora esta expresión respecto a *k*. La derivada del lado izquierdo es por definición λ(t). La derivación del lado derecho es muy semejante al trabajo que ya se ha hecho y se desarrolla como sigue:

$$\lambda(t) = \Delta \frac{\partial u}{\partial k} + \frac{\partial}{\partial k} V^*(k(t+\Delta), t+\Delta)$$

$$= \Delta \frac{\partial u}{\partial k} + \frac{\partial k(t+\Delta)}{\partial k} \lambda(t+\Delta)$$

$$= \Delta \frac{\partial u}{\partial k} + \left(1 + \Delta \frac{\partial f}{\partial k}\right)(\lambda + \dot{\lambda}\Delta)$$

$$= \Delta \frac{\partial u}{\partial k} + \lambda + \Delta\lambda \frac{\partial f}{\partial k} + \Delta\dot{\lambda} + \lambda \frac{\partial f}{\partial k} \Delta^2.$$

Se puede ignorar el término con Δ^2 y realizar las cancelaciones obvias para obtener

(6) $$-\dot{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial k}.$$

Ésta es la segunda ecuación importante del principio del máximo y posee una interpretación económica esclarecedora.

Para un matemático, $\dot{l}$ es la tasa a la cual el valor de una unidad de capital está cambiando. Para un economista, es la tasa de cambio a la que el capital se está apreciando. Por lo tanto, $-\dot{l}$ es la tasa a la cual una unidad de capital se deprecia en el tiempo t. De acuerdo con esto, la ecuación establece que cuando se sigue la trayectoria temporal óptima de la acumulación de capital, la disminución en valor de una unidad de capital en un intervalo de tiempo corto es la suma de su contribución a las ganancias generadas durante el intervalo, y su contribución a la mejoría del valor de las existencias de capital al final del intervalo. Es decir, una unidad de capital pierde valor o se deprecia a medida que el tiempo transcurre a una tasa a la que su contribución potencial a las ganancias se transforma en su contribución pasada.

Este hallazgo tiene parecido con la figura sintáctica empleada por los teóricos del capital del siglo XIX. Decían que un bien de capital incorpora una cierta cantidad de valor, la cual impartía gradualmente a las mercancías que eran elaboradas con su asistencia. Esto es precisamente lo que aquí sucede. Cada unidad del bien de capital gradualmente está disminuyendo en valor precisamente a la misma tasa a la cual está dando origen a los productos valuables, ya sea que se vendan actualmente o se almacenen para el futuro en el capital acumulado. También se puede interpretar a $-\dot{l}$ como la pérdida en que se incurriría si la adquisición de una unidad de capital fuera pospuesta durante un corto periodo.

El principio del máximo

En realidad se ha llegado a la construcción de la función auxiliar o función hamiltoniana

$$H = u(k,x,t) + \lambda(t) f(k,x,t),$$

para calcular su derivada parcial respecto a x, e igualar dicha derivada parcial a cero. Esta construcción tiene un significado económico sustancial. Si uno se imagina que se multiplica a H por Δ, se puede ver que es la suma de las ganancias totales generadas en el intervalo Δ más la acumulación de capital durante el intervalo evaluado en su valor marginal. Entonces $H\Delta$ es la contribución total de las actividades que continúan durante el intervalo Δ, lo cual incluye tanto a su contribución directa a la integral W como al valor del capital acumulado durante el intervalo. Naturalmente, entonces, la variable de decisión x durante el intervalo actual debe elegirse de forma que se haga H tan grande como sea posible. A esto se debe que el procedimiento que se está describiendo se conozca como el principio del máximo. Una manera sencilla y con frecuencia efectiva de realizar esto consiste en elegir un valor de la variable de control para el cual la derivada parcial se elimine, como se ha hecho.

En efecto, también se ha calculado la derivada parcial de H respecto a k e igualado dicha derivada parcial a – λ El sentido común de esta operación se puede observar mejor a partir del hamiltoniano modificado

$$H^* = u(k,x,t) + \frac{d}{dt}\lambda k \quad = u(k,x,t) + \lambda k + \dot{\lambda} k$$

$H^*\Delta$ es la suma de las ganancias generadas durante un intervalo de duración Δ y el incremento en el valor de las existencias de capital a lo largo del intervalo o, en cierto sentido, el valor de la contribución total de actividades durante el intervalo a las ganancias actuales y futuras.[8] Si se maximiza H^* formalmente respecto a x y k se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial k} + \dot{\lambda} = 0,$$

que son las ecuaciones (5) y (6).

Por supuesto que la empresa no puede maximizar H^* respecto a k ya que k no es una variable sujeta a elección. Pero se ve ahora que las ecuaciones (5) y (6) le sugieren a la empresa elegir las trayectorias temporales de x y l de manera que los valores que resulten de k sean los que elegiría, si pudiera hacerlo, para hacer a la suma de las ganancias y el incremento en el valor del capital tan grande como sea posible en cada intervalo corto de tiempo.

Como nota técnica, al derivar H, el valor marginal l no se considera como función de x y k, sino como una trayectoria temporal separada, la cual se tiene que determinar óptimamente.

Se tienen ahora al frente las ideas básicas del principio del máximo. Naturalmente existe mucho más con referencia al método que estas dos ecuaciones. Se requiere una buena cantidad de elaboración matemática antes de que las dos ecuaciones se puedan implementar, y posteriormente se indicarán algunas de las complicaciones que pueden surgir. Pero existe una característica adicional que tiene que mencionarse antes de que se hayan terminado de manejar los fundamentos. Esto tiene que ver con las condiciones de frontera; por ejemplo, la cantidad de capital disponible al principio del periodo de planificación y el monto requerido que esté disponible en la fecha terminal.

Para observar cómo estos datos de contorno afectan la solución del problema, considérese cómo operan las tres ecuaciones básicas. Son:

(I) $\quad \dot{k} = f(k,x,t)$

---

8. H^* difiere de H al incluir las ganancias de capital.

(II) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

(III) $$\frac{\partial u}{\partial k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial k} = -\lambda.$$

La primera de estas ecuaciones es parte de los datos del problema. Especifica cómo crece el capital en cualquier instante como consecuencia de su situación actual y las elecciones hechas. Las otras dos ecuaciones representan los resultados principales del principio de maximización. La ecuación II dice que la variable de decisión a cada instante debe seleccionarse de forma que las ganancias marginales inmediatas estén en equilibrio con el valor de la contribución marginal a la acumulación de capital. La ecuación III establece que el capital se deprecia a la misma tasa que la que contribuye al producto útil.

Las tres ecuaciones se escriben y recuerdan convenientemente en términos del hamiltoniano. De esta manera, las ecuaciones son:

(I') $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{k}$$

(II') $$\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

(III') $$\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda.$$

Obsérvense los papeles recíprocos desempeñados por k y λ en estas ecuaciones. La derivada parcial de H respecto a cualquiera de las dos simplemente está relacionada con la derivada temporal de la otra.

Estas tres ecuaciones determinan conjunta y completamente las trayectorias temporales de la variable de elección, las existencias de capital y el valor del capital. Se iniciará en el tiempo cero con unas ciertas existencias de capital y un cierto valor inicial para el capital. Véase ahora la ecuación II desarrollada un poco más explícitamente:

(II) $$\frac{\partial}{\partial x} u(k,x,t) + \lambda(t) \frac{\partial}{\partial x} f(k,x,t) = 0.$$

Con k y λ conocidos, esta ecuación determina el valor de x, la variable de elección.[9] Al poner este valor en la ecuación I se obtiene $\dot{k}$, la tasa a la cual el acervo de capital está cambiando. Al ponerlo en la ecuación III se obtiene de forma semejante $\dot{\lambda}$ que es la

9. Aquí surgen algunas complicaciones matemáticas. Se supone que con k, λ y t dadas, la ecuación (II) se satisface por un valor único de x.

tasa a la que está cambiando el valor de una unidad de capital. Entonces se conoce al acervo de capital y el valor de una unidad de capital un corto periodo de tiempo después. Al emplear estos nuevos valores, se pueden repetir las sustituciones en las tres ecuaciones y encontrar así, en orden, un nuevo valor de la variable de elección, una nueva tasa para el cambio de las existencias de capital y una nueva tasa para el cambio en el valor del capital. Al repetir el ciclo una y otra vez, se puede trazar la evolución de todas las variables desde el tiempo cero hasta el tiempo T.

En síntesis, al trabajar juntas estas tres ecuaciones determinan las trayectorias óptimas de todas las variables al empezar de cualquier posición inicial dada. En otro sentido, entonces, el problema de la elección de una trayectoria óptima se ha reducido a un problema mucho más sencillo, el problema de elegir un valor inicial óptimo para el valor de una unidad de capital. Esto no es de ninguna manera un problema fácil, pero obviamente es mucho más fácil que encontrar una trayectoria óptima completa sin la ayuda de estas ecuaciones.

Las condiciones de frontera

Se puede ahora traer a colación el papel de las condiciones de contorno. Son de dos tipos. Las condiciones iniciales describen el estado de la empresa o la economía en la fecha inicial, t = 0. En particular, establecen las existencias iniciales de capital. Las condiciones terminales prescriben los valores de algunas, o todas, las variables en la fecha terminal, t = T. Por ejemplo, el problema puede requerir que la empresa tenga al menos algún acervo de capital especificado, digamos $\bar{K}$ disponible en la fecha terminal, el cual se puede imponer al incluir $k(T) \geq \bar{K}$ en las condiciones del problema. O, una vez más, si el problema es estrictamente uno de maximización de ganancias durante el intervalo finito, 0 a T, es claro que el capital disponible en la fecha T no puede contribuir a tal objetivo; existe demasiado tarde para ser útil antes de la fecha T. Dicho problema da origen a la condición terminal $\lambda(T) = 0$.

Hasta ahora se ha visto que las tres ecuaciones I, II y III determinan conjuntamente la evolución completa de x, k y λ una vez que los valores de inicio han sido prescritos. En particular determinan los valores terminales. Sólo[10] se tiene que determinar un conjunto de valores iniciales que conduzca a valores terminales aceptables para encontrar una trayectoria temporal completa que satisfaga las condiciones necesarias para ser óptima. En el ejemplo, puesto que están dadas las existencias iniciales de capital, el valor inicial crítico que se determina es $\lambda(0)$, el valor marginal del capital en la fecha inicial. Las tres ecuaciones básicas, aunque pueden parecer abstractas, de hecho constituyen una solución constructiva para el problema de selección de una trayectoria temporal óptima. En principio, son una solución del problema de la acumulación óptima de capital.

10. ¡Sólo! se ha logrado una alta reputación al resolver este problema en circunstancias importantes.

Se ha encontrado ahora que la técnica de viejo cuño de igualar los márgenes, empleada con un poco de ingenio, lleva al principio del máximo, que es el teorema fundamental de la teoría del control óptimo.

Un ejemplo

En relación con el ejemplo más sencillo conocido de la aplicación de estos principios a un problema económico, se encuentra el de la derivación de la trayectoria socialmente óptima de la acumulación de capital para una economía unisectorial con una población exponencialmente creciente y una producción con rendimientos constantes a escala.[11]

Establézcanse cierta notación y algunos datos. N(t) es la población en la fecha t. Puesto que la población crece exponencialmente, digamos, a la tasa n,

$$N(t) = N(0)e^{nt}.$$

Se evitará lo abigarrado de la notación si se supone $N(0) = 1$ (medida en cientos de millones de personas). Denótese al consumo per cápita por c y a la utilidad disfrutada por una persona al consumir a la tasa c por $u(c)$. La utilidad total de la que disfrutan todas las personas vivas en el momento t con el consumo per cápita a la tasa c es

$$e^{nt}u(c).$$

Sea r la tasa social de preferencia temporal. Entonces la importancia en el momento 0 del consumo alcanzado en el tiempo t es

(7) $$e^{-\rho t}e^{nt}u(c) = e^{(n-\rho)t}u(c).$$

Un objetivo social defendible para una sociedad con un horizonte temporal T (concebiblemente infinito) es maximizar

(8) $$W = \int_0^T e^{(n-\rho)t}u(c)dt,$$

o la suma de las utilidades disfrutadas entre 0 y T.[12]

El consumo está limitado por la producción y la producción por el acervo de capital. Sea K(t) la notación para las existencias de capital en la fecha t y sea $k(t) = K(t)/N(t)$ la expresión que denote el capital per cápita. En virtud de los rendimientos constantes a escala, se puede escribir la función de producción de la economía como

11. En Arrow [1] se puede encontrar una discusión más amplia de un modelo semejante.
12. Es mejor suponer $\rho > n$ o de otra manera la integral será infinita para $T = \infty$.

$$Y(t) = N(t) f(k(t))$$

o, al omitir los confusos argumentos temporales,

$$Y = Nf(k) = e^{nt} f(k).$$

La inversión bruta es igual a la producción menos el consumo, o $Y - Nc$. La inversión neta es igual a la inversión bruta menos la depreciación física. Supóngase que el capital físico se deteriora a la tasa d por unidad al año de forma que la tasa total de desgaste de acervo físico, cuando es *K*, es dK. Entonces la acumulación neta de capital es

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= Y - Nc - \delta K = N(f(k) - c) - \delta K \\
&= N(f(k) - c) - \delta Nk. \\
&= N(f(k) - c - \delta k).
\end{aligned}$$

Finalmente, elimínese $\dot{K}$ al hacer notar que:

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= \frac{d}{dt}\frac{K}{N} = \frac{K}{N}\left(\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{N}}{N}\right) \\
&= k\left(\frac{\dot{K}}{Nk} - n\right) \\
&= f(k) - c - \delta k - nk \\
&= f(k) - c - (n+\delta)k.
\end{aligned} \tag{9}$$

Las ecuaciones (8) y (9) constituyen el ejemplo simple. La ecuación (9) es un ejemplo de la ecuación (I). Para derivar la ecuación (II), derívense las ecuaciones (7) y (9) respecto a la variable de elección, *c*:

$$\frac{\partial}{\partial c} d^{(n-\rho)t} u(c) = e^{(n-\rho)t} u'(c),$$

$$\frac{\partial}{\partial c}[f(k) - c - (n+\delta)k] = -1.$$

De aquí que la ecuación (II) sea:

$$e^{(n-\rho)t} u'(c) - \lambda = 0, \tag{10}$$

o el valor de una unidad de capital en el momento t es la utilidad marginal del consumo en ese momento, ajustada por el crecimiento de la población y la tasa social de la preferencia temporal.

La ecuación (III) se obtiene de forma semejante mediante la derivación de las ecuaciones (7) y (9) respecto a *k*. De aquí resulta:

$$-\dot{\lambda} = 0 + \lambda[f'(k) - (n + \delta)],$$

u

(11) $$f'(k) = n + \delta - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}.$$

La ecuación (10) se puede utilizar para eliminar la no familiar λ. Al derivarla respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = n - \rho + \frac{u''(c)}{u'(c)}\frac{dc}{dt}.$$

Entonces la ecuación (11) se transforma en

$$f'(k) = \rho + \delta - \frac{u''(c)}{u'(c)}\frac{dc}{dt}.$$

Ésta es la ecuación final para la trayectoria óptima de la acumulación de capital. Establece que a lo largo de dicha trayectoria la tasa de consumo en cada momento debe elegirse de manera que la productividad marginal del capital sea la suma de tres componentes:

(1) ρ, la tasa social de preferencia temporal,
(2) δ, la tasa de deterioro físico del capital, y
(3) el tercer término que tiene una apariencia más bien formidable y que, sin embargo, es simplemente la tasa porcentual a la cual el costo psíquico de ahorrar disminuye con el tiempo. Esto se puede ver al hacer notar que el costo psíquico de ahorrar en cualquier momento es $u'(c)$, su tasa temporal de cambio es $u'(c)$, y su tasa porcentual temporal de cambio es el negativo del tercer término en la suma.

En otras palabras, a lo largo de la trayectoria óptima de acumulación la contribución marginal de una unidad de capital al producto durante cualquier intervalo corto de tiempo debe ser justamente suficiente para cubrir los tres componentes del costo social de poseer esa unidad de capital, es decir, la tasa social de preferencia temporal, la tasa de deterioro físico del capital y el costo psíquico adicional de ahorrar una unidad al principio del intervalo, más que al final. Todas éstas se expresan como porcientos por unidad de tiempo, lo cual también es la dimensión de la productividad marginal del capital.

La evolución de esta economía a lo largo de su trayectoria óptima de desarrollo se puede visualizar más rápidamente al dibujar un diagrama de fase como el mostrado en la figura 1. Se ha encontrado que las tasas de cambio de *k* y *c* se pueden escribir:

$$\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c, \tag{9}$$

$$\dot{c} = \frac{u'(c)}{u''(c)}[\rho + \delta - f'(k)].$$

Entonces $k = 0$ siempre que *c* y *k* satisfagan la ecuación

$$c = f(k) - (n+\delta)k.$$

En la figura 1, *k* se traza horizontalmente y *c* verticalmente. La curva etiquetada $\dot{k} = 0$ muestra las combinaciones de *c* y *k* que satisfacen esta ecuación.

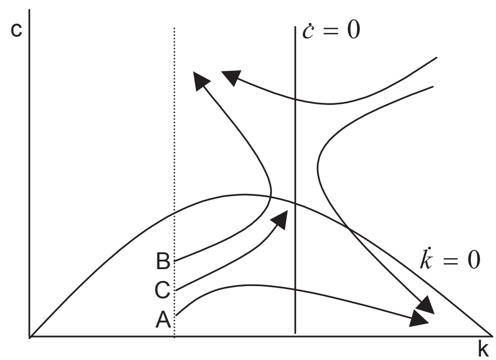

Figura 1

Tiene la forma dibujada por los supuestos convencionales de que la productividad marginal del capital es positiva pero decreciente (o sea, $f'(k) > 0, f''(k) < 0$) y el supuesto muy viable de que para niveles muy bajos de capital por trabajador, $f'(k) > n + \mathrm{d}$. También se supone que no es posible producción alguna sin algo de capital, es decir, $f(0) = 0$. Si el consumo per cápita es menor que la tasa en el lugar geométrico acabado de describir, el capital per cápita aumenta $(\dot{k} > 0)$. Arriba del lugar geométrico $\dot{k} < 0$.

De manera similar, el consumo per cápita no cambia $(\dot{c} = 0)$ si

$$f'(k) = \rho + \delta.$$

La línea vertical de la figura 1, titulada $\dot{c} = 0$, se traza a este nivel de k. Si se acepta el supuesto usual de utilidad marginal positiva pero decreciente $u'(c) > 0,\ u''(c) < 0$. Entonces $\dot{c} > 0$, o sea, el consumo per cápita crece, a la izquierda de dicha línea. La razón es que con niveles bajos de capital per cápita la cantidad de depreciación es pequeña y el monto de capital requerido para equipar el aumento en la población con el nivel actual de capital per cápita es asimismo pequeño.

Estas consideraciones permiten describir cualitativamente las leyes de movimiento del sistema. Imagínese un nivel bajo inicial de capital per cápita, representado por la vertical discontinua de la gráfica. La evolución completa del sistema está determinada por la elección del nivel inicial del consumo per cápita. Si se selecciona un nivel inicial bajo, como el punto A en la figura, tanto el consumo como el capital per cápita aumentarán por algún tiempo, siguiendo la flecha curveada que emana del punto A. Pero cuando el nivel de capital per cápita alcanza el nivel crítico, el consumo per cápita empezará a disminuir, aunque el capital per cápita continuará aumentando. Ésta es una política de generosidad inicial en el consumo seguida de una abstención creciente intencionada, presumiblemente para lograr cierto nivel último deseado de capital per cápita.

De forma semejante, la trayectoria que surge del punto B representa una política de consumo per cápita en continuo crecimiento, con el capital siendo acumulado al principio y eventualmente siendo consumido. Las otras trayectorias dibujadas en la gráfica tienen interpretaciones semejantes.

La trayectoria que se origina en el punto C es de interés particular. Conduce a la intersección de dos lugares geométricos críticos, el estado estable del sistema en el cual no cambian ni el consumo per cápita ni el ingreso per cápita. Una vez logrado este punto todos los valores absolutos crecen exponencialmente a la tasa común de n.

Se puede observar ahora que si el capital per cápita inicial está dado, el curso completo de la economía está determinado por la selección del nivel inicial del consumo per cápita. Esta elección determina, entre otras cosas, la cantidad del capital per cápita especificada en cualquier fecha.[13] Si las condiciones del problema prescriben un monto particular de capital en cierta fecha, el c inicial debe ser aquél con una trayectoria que conduzca al punto especificado. Si no existe dicha prescripción para la acumulación de capital, la c inicial será aquella que cause que las existencias de capital se agoten en la fecha terminal bajo consideración. Y si no existe fecha terminal (es decir, $T = \infty$) el problema se hace mucho más enredoso matemáticamente y, en realidad, la teoría de la optimación con un horizonte temporal infinito no está todavía completamente establecida. Pero, en este caso sencillo, se puede ver que la única solución posible es la trayectoria que se origina en el punto C y termina en el punto en donde $\dot{c} = \dot{k} = 0$. Porque la figura muestra que todas las otras trayectoria que satisfacen las condiciones optimantes conducen a la larga a situaciones en las cuales ya sea c o k es

13. La posición de la economía en fechas particulares no se puede leer a partir del diagrama de fase.

negativa. Puesto que tales trayectorias no se pueden materializar, la única trayectoria optimante posible es aquella que se acerca a $\dot{c} = \dot{k} = 0$.

Este resultado es totalmente característico de los problemas con horizontes infinitos: las trayectorias de crecimiento óptimo, en circunstancias muy variadas, se aproximan a la situación en la cual el consumo y las existencias de capital crecen exponencialmente a una tasa determinada por la tasa de crecimiento de la población y la tasa del progreso técnico (supuesta aquí igual a cero), precisamente como en este caso.

Para problemas con horizonte finito, se puede mostrar que entre más lejana se considere la fecha terminal, más cercana estará la trayectoria a la posición de estado estable ($\dot{c} = \dot{k} = 0$) antes de virar hacia ya sea un alto consumo o una alta acumulación de capital, como puede ser el caso. Ésta es una versión del teorema de la autopista.

Derivación vía la maximización finita

Aquellos que desconfían de los argumentos inteligentes e intuitivos, como yo, pueden encontrar cierto consuelo al observar los mismos resultados deducidos a partir del método más familiar de maximizar sujeto a un número finito de restricciones. Supóngase que el periodo completo de T meses se divide en *n* subperiodos de *m* meses cada uno. Entonces, $u(x_t, k_t, t)$ indica la tasa a la que las ganancias están siendo generadas u otros beneficios derivados durante el t-ésimo subperiodo, con x_t siendo el valor de la variable de decisión durante dicho subperiodo, y k_t el valor de la variable de estado en su inicio. Puesto que el subperiodo es de *m* meses de largo, las ganancias totales generadas son $u(x_t, k_t, t)m$.

La tasa de cambio de la variable de estado durante el t-ésimo subperiodo es $f(x_t, k_t, t)$ Por lo tanto, los valores de la variable de estado en los inicios de subperiodos sucesivos están conectados por la ecuación

$$k_{t+1} = k_t + f(x_t, k_t, t)m \ . \tag{12}$$

Finalmente, la versión finita de problema consiste en seleccionar *2n* valores, x_t, k_t de manera que se maximicen las ganancias totales a lo largo del periodo completo,

$$\sum_{t=1}^{n} u(x_t, k_t, t)m$$

sujeta a las *n* restricciones (12), y a cualesquiera condiciones de contorno que se puedan aplicar. Para ser específico, supóngase que se preasignan valores iniciales y terminales para la variable de estado. Éstos dan lugar a las condiciones laterales

$$k_1 = K_0$$

$$k_{n+1} = K_T \ .$$

Este problema se resuelve al establecer la función lagrangeana

$$L = \sum_{t=1}^{n} u(x_t, k_t, t)m + \sum_{1}^{n} \lambda_t [k_t + f(x_t, k_t, t)m - k_{t+1}] + \lambda_0 [K_0 - k_1] + \mu [k_{n+1} - K_t]$$

y haciendo cada una de sus derivadas parciales iguales a cero. Las letras griegas que aparecen en la función son los multiplicadores lagrangeanos, uno para cada restricción. Se interpretarán después de que se hayan completado los cálculos.
La misma expresión hamiltoniana que se manejó anteriormente está empezando a aparecer, por lo que es conveniente escribir

$$H(x_t, k_t, t) = u(x_t, k_t, t) + \lambda_t f(x_t, k_t, t)$$

y

$$L = m \sum_{1}^{n} H(x_t, k_t, t) + \sum_{1}^{n} \lambda_t (k_t - k_{t+1}) + \lambda_0 (K_0 - k_1) + \mu (k_{n+1} - K_T).$$

Derívese ahora e iguálense las derivadas a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x_t} = m \frac{\partial}{\partial x_t} H(x_t, k_t, t) = [u_1(x_t, k_t, t) + \lambda_t f_1(x_t, k_t, t)]m = 0 \qquad \text{para t} = 1, 2, ..., n, \tag{13}$$

la cual es semejante a la ecuación (5). Y

$$\frac{\partial L}{\partial k_t} = m \frac{\partial}{\partial k_t} H(x_t, k_t, t) + \lambda_t - \lambda_{t-1} = 0$$

o

$$-\frac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{m} = u_2(x_t, k_t, t) + \lambda_t f_2(x_t, k_t, t), \text{ para t} = 1, 2, ..., n, \tag{14}$$

que es la análoga discreta de la ecuación (6).

Finalmente

$$\frac{\partial L}{\partial k_{n+1}} = -\lambda_n + \mu = 0.$$

Así, $m = l_n$ y se puede olvidar.

Estas ecuaciones son aplicables a problemas en los que el tiempo se considera como una variable discreta. Los multiplicadores lagrangeanos tienen su interpretación usual. En particular, l_t es la cantidad por la cual el valor máximo obtenible de $\sum u(x_t, k_t, t)m$ se incrementaría si una unidad adicional de capital fuera a estar disponible por arte de magia al final del t-ésimo periodo. En otras palabras, λ_t es el valor marginal del capital disponible en la fecha *m*t.

Las condiciones de maximización encontradas previamente deben ser el límite de estas ecuaciones a medida que *m* se aproxima a cero y *n* se acerca a infinito, y así sucede. Para mostrar esto, se tiene que revisar ligeramente la notación. Las variables con subíndices indican ahora los valores que las variables tienen en el t-ésimo periodo. Cuando *m* cambia, las fechas incluidas en el t-ésimo periodo también cambian. Por lo que se necesitan símbolos para los valores de las variables en fechas fijas. Para este fin, sea τ cualquier fecha y $x(\tau)$ por ejemplo, el valor de *x* en esa fecha. La conexión entre x_t y $x(\tau)$ es fácil. Cualquier fecha τ está en el subperiodo numerado t, en donde t está dada por

$$t = 1 + [\tau/m].$$

En esta ecuación, [ ] es una notación anticuada que significa "integral parte de". Por ejemplo, [3.14159] = 3. Entonces $x(\tau)$ se define como

$$x(\tau) = x_{t+[\tau/m]},$$

y de forma similar para las otras variables. Las ecuaciones (13) y (14) se pueden ahora escribir en términos de τ:

(15) $$u_1[x(\tau), k(\tau), \tau] + \lambda(\tau) f_1[x(\tau), k(\tau), \tau] = 0,$$

(16) $$-\frac{\lambda(\tau) - \lambda(\tau - m)}{m} = u_2[x(\tau), k(\tau), \tau] + \lambda(\tau) f_2[x(\tau), k(\tau), \tau].$$

Obsérvese que en la ecuación (16) λ_{t-1} ha sido reemplazada por $\lambda(\tau - m)$, lo que refleja que los inicios de los intervalos se encuentran *m* meses separados.
La ecuación (15) es idéntica a la ecuación (II). Conforme *m* se aproxima a cero, el miembro izquierdo de la ecuación (16) se acerca a $-\dot{\lambda}(\tau)$ lo que da por hecho de que se acerca a un límite y lo cual aplica la definición de la derivada. En consecuencia, toda la ecuación se aproxima a la ecuación (III). La ecuación (I) es de manera semejante y obvia la forma límite de la ecuación (12).

De este modo, las ecuaciones básicas del principio del máximo son consideradas como las formas límites de las condiciones necesarias y ordinarias de primer orden para un máximo aplicadas al mismo problema, y las variables auxiliares del principio del máximo son los valores límites de los multiplicadores lagrangeanos.

Limitaciones y ampliaciones

Este desarrollo completo ha sido excesivamente informal, para ponerlo en términos amables. El cálculo de variaciones es una materia difícil y delicada, de forma que una elección siempre se tiene que hacer entre el establecer una proposición correctamente, con todas las limitaciones que merece, y establecerla de forma clara y forzada de modo que la idea esencial se pueda comprender de un solo golpe. A lo largo de este documento se ha elegido la alternativa más inteligible, ya que todos los teoremas se han establecido y probado rigurosamente en diferentes lugares de la literatura.[14] Esta elección, como siempre ocurre, tiene desventajas especiales en el presente contexto debido a que mucho de la virtud del principio del máximo se encuentra precisamente en las limitaciones que han sido suprimidas: es válido bajo condiciones más generales que los métodos clásicos que generan casi los mismos teoremas.

Como ejemplo del modo alternativo de exposición, las principales conclusiones se pueden establecer más formal y correctamente como sigue:[15]

TEOREMA 1. Sea que se desee encontrar una trayectoria temporal de una variable de control x(t) de forma que se maximice la integral

$$\int_0^T u[k(t), x(t), t]dt$$

en donde

$$\frac{dk}{dt} = f[k(t), x(t), t],$$

en donde k(0) está preasignado, y en donde se requiere que $k(T) \geq \bar{K}$. Se supone que las funciones $u(k, x, t)$ y $f(k, x, t)$ son diferenciables continuamente dos veces respecto a k, diferenciables respecto a x y continuas respecto a t. Entonces si x^*(t) es una solución para este problema, existe una variable auxiliar λ(t) tal que:

(a) Para cada una de las t, x^*(t) maximiza $H[k(t), x(t), \lambda(t)]$ en donde $H(k, x, \lambda, t) = u(k, x, t) + \lambda f(k, x, t)$;

(b) λ(t) satisface

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

evaluada en $k = k(t), x = x^*(t), \lambda = \lambda(t)$; y

14. Por ejemplo, en Arrow y Kurz [3] y Halkin [5].
15. Este teorema dado está adaptado de Arrow [2], proposiciones 1 y 2. En la misma fuente se pueden encontrar teoremas más elaborados.

(c) $k(T) \geq \overline{K}, \lambda(T) \geq 0, \lambda(t)[k(T) - \overline{K}] = 0.$

Este teorema se aplica al tipo de problema que se ha venido considerando, con la elaboración útil de que un límite más bajo se ha impuesto al valor terminal de la variable de estado, *k*. La parte (c) de la conclusión, conocida como la condición de transversalidad, surge a partir de este requerimiento agregado. Establece que el valor terminal de la variable auxiliar no puede ser negativo y que será cero si, al final de la trayectoria óptima, *k*(T) excede al valor requerido.

La diferencia principal entre esta proposición formal y las conclusiones previas se encuentra en la conclusión (a) del teorema. La afirmación de que la función hamiltoniana, *H*, se maximiza en cada instante de tiempo no es la misma que la afirmación de que sus derivadas parciales se eliminen, hecha en las ecuaciones (II) y (II'). El igualar las derivadas parciales a cero no es ni necesario ni suficiente para la maximización, aunque sea especialmente esclarecedor para los economistas, cuando es apropiado, porque las condiciones para las derivadas parciales se transfieren rápidamente a las igualdades marginales. Existen tres implicaciones que pueden hacer de la eliminación de las derivadas parciales un indicio inadecuado de la localización de un máximo.

En primer lugar, existen las así llamadas condiciones de orden superior. Las primeras derivadas parciales se pueden eliminar en un mínimo o en un punto de ensilladura así como en un máximo. Para estar en guardia contra esta posibilidad, las segundas derivadas parciales, y aún más elevadas, tienen que tenerse en cuenta.

En segundo término, la eliminación de las derivadas parciales, aun cuando se satisfagan las condiciones de orden superior, establece solamente un máximo local. No excluye que pueda haber algún otro valor de las variables, a una distancia finita, para el cual la función que se maximiza tenga todavía un valor más alto. Para fines de seguridad sobre este punto, se tienen que inspeccionar las propiedades globales más que las meramente diferenciales o locales de las funciones implicadas.

Por último, cuando el intervalo de variación de las funciones implicadas está de alguna manera limitado, se puede obtener el máximo en un punto en donde las derivadas parciales no se eliminen. Esto sucede frecuentemente en las aplicaciones económicas, lo cual es muy conocido a raíz de la programación lineal. Por ejemplo, para una empresa con grandes posibilidades de crecimiento puede ser óptimo reducir sus dividendos a cero, aunque no se permiten los dividendos negativos. En términos de las ecuaciones discutidas esto se indicaría al encontrar

$$\partial H / \partial x_t < 0 \qquad \text{para todas las } x_t \geq 0,$$

en donde x_t se refiere a los pagos de dividendos por año en el momento t. *H* sería maximizada al elegir $x_t = 0,$ su valor permitido más pequeño, aunque la derivada parcial aquí no se elimine.[16] Este máximo no se podría encontrar mediante los métodos ordinarios del cálculo. Otros métodos están disponibles, por supuesto, por ejemplo los de la programación matemática. Es precisamente en estas circunstancias que el principio del máximo genera teoremas más elegantes y manejables que los del antiguo cálculo de variaciones, el cual está más estrechamente relacionado con el cálculo diferencial.

Por todas estas razones, la condición fundamental para una trayectoria de crecimiento óptima es la maximización de $H(k, x, \lambda, t)$ en todos los momentos del tiempo, y el desvanecimiento de $\partial H / \partial x$ sólo es un mecanismo imperfectamente confiable para la localización de este máximo. Sin embargo, es un procedimiento muy esclarecedor y contiene la esencia conceptual de la cuestión, razón por la cual es se ha puesto énfasis en ello.

A lo largo de la discusión se ha tratado de ser ambiguo acerca de la naturaleza exacta de las trayectorias temporales, x(t) y k(t). Se han tratado a x y k como si fueran variables unidimensionales, como la cantidad de capital o la tasa de consumo. No obstante ello, en muchos problemas económicos existen varias variables de estado y diversas variables de elección. En tales problemas, es ventajoso considerar a x(t), k(t), a sus derivadas, y a todo lo demás, como vectores. Entonces $\lambda(t)$ también debe ser considerada como un vector, con un componente para cada componente de k(t). Cuando se adopta este punto de vista, todas las conclusiones y el teorema todavía se aplican con escasos cambios en la notación. Es por esto que se es tan ambiguo: es más fácil pensar en números ordinarios, pero las conclusiones y aun la mayor parte de los argumentos son aplicables cuando las variables son vectores.

La última afirmación genera ciertas posibilidades nuevas e importantes. Muchos problemas económicos tienen que ver con trayectorias temporales de variables interconectadas. Por ejemplo, un problema puede tratar con las trayectorias de crecimiento del consumo (*c*), la inversión (*i*), el gasto gubernamental (*g*) y el ingreso (*y*) de una economía. Estas cuatro variables se pueden considerar como componentes de un vector de decisión, *x*, conectado mediante una identidad contable del ingreso $c(t) + i(t) + g(t) = y(t)$ Entonces, el problema de optimación de la trayectoria de crecimiento requiere de encontrar las trayectorias de crecimiento óptimas para estas cuatro variables (y posiblemente otras) que satisfagan la identidad contable del ingreso.

La nueva característica que se ha encontrado es la introducción de restricciones o condiciones laterales de los valores de las variables de decisión. La misma línea de razonamiento que se ha estado utilizando se aplica, con la única modificación de que cuando la función $V(k, x_t, t)$ se maximice, el vector x_t tiene que ser elegido de forma que satisfaga todas las restricciones laterales. El álgebra se hace algo más complicada pero lleva a conclusiones como las discutidas líneas arriba y con la misma importancia económica. En 1968 Kenneth Arrow derivó una lúcida versión de la proposición formal del teorema aplicable a problemas en los que las variables de decisión están

16. Técnicamente a esto se le conoce como "solución de esquina".

restringidas. Véase [2, Proposición 3, pág. 90]. Por supuesto, también este argumento supone que son tales las circunstancias que las derivadas parciales apropiadas se eliminan en el máximo.

Referencias bibliográficas

[1] Arrow, K. J. (1966) "Discounting and Public Investment Criteria," en A. V. Kneese y S. C. Smith (eds.), *Water Research,* Washington, pp. 13-32.
[2] —— (1968) "Applications of Control Theory to Economic Growth", American Mathematical Society, *Mathematics of the Decision Sciences, Part 2,* Providence, pp. 85-119.
[3] Arrow K. J., y M. Kurz (1968) *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy,* University Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences.
[4] Bellman, R. (1957) *Dynamic Programming,* Princeton.
[5] Halkin, H. (1964) "On the Necessary Condition for Optimal Control of Nonlinear Systems", *Journal D'Analyse Mathematique,* núm. 12, pp. 1-82.
[6] Hotelling, H. (1925) "A General Mathematical Theory of Depreciation", *J. Amer. Statist. Ass.,* núm. 20, sept., pp. 340-353.
[7] Pontryagin, L. S., V. G, Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, y E. F. Mishchenko (1962) *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (traducción por K. N. Trirogoff), Nueva York.
[8] Ramsey, F. P. (1942) "A Mathematical Theory of Saving", *Econ. J.,* núm. 38, diciembre, pp. 543-559.
[9] Robinson, J. (1956) *The Accumulation of Capital,* Homewood.